МАШИНОСТРОЕНИЕ

УДК 681.51

В.Л.ЗАКОВОРОТНЫЙ [*], НГУЕН ДОНГ АНЬ[**], ФАМ ДИНЬ ТУНГ[*]

УСТОЙЧИВОСТЬ ЭВОЛЮЦИОННОЙ ТРАЕКТОРИИ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩЕЙ С ТРИБОСРЕДОЙ

Рассматриваются условия потери устойчивости движения механической системы, взаимодействующей со средой, формируемой в трибосопряжении. Показаны условия формирования и роль диссипативных, гироскопических, потенциальных и циркуляционных сил, формируемых в узле трения естественным образом и изменяющихся в ходе эволюционных преобразований.

***Ключевые слова**: эволюция, трибосреда, устойчивость, стационарная траектория.*

Введение. Для обеспечения движения элементов машин и механизмов во многих случаях необходимо решать вопросы устойчивости движения. При этом, как правило, некоторый элемент машины взаимодействует с узлом трения. В свою очередь, в зоне, находящейся между контактируемыми поверхностями, формируется диссипативная среда, образующая динамическую связь [1-3]. Основные динамические свойства такой системы можно раскрыть на основе использования «базовой» динамической модели трибосистемы [4], рассматривающей смещение индентора, подвешенного с помощью упругодиссипативных подвесок к абсолютно жёсткому основанию. Индентор в базовой модели представляется в виде сосредоточенной массы. Поэтому изгибные колебания его поверхности не учитываются. В свою очередь, образец также обладает большой массой и считается недеформируемым (рис.1). Он движется со скоростью $V = const$, задаваемой от внешнего источника. Тогда уравнение движения такой системы можно представить в виде

$$m\frac{d^2X}{dt^2} + h\frac{dX}{dt} + cX = F(X, \frac{dX}{dt}, V, p) + U, \qquad (1)$$

где $X = \{X_1, X_2\}^T$ - вектор состояния системы, координаты которого показывают текущие значения положения поверхности индентора в трибосреде (формируемой в процессе относительного скольжения переходной области между контактируемыми поверхностями); $F(X, \frac{dX}{dt}, V, p) = \{F_1(X, \frac{dX}{dt}, V, p), F_2(X, \frac{dX}{dt}, V, p)\}^T$ - вектор-функция, раскрывающая зависимость сил контактного взаимодействия от координат состояния, её свойства определяются формируемой в процессе трения переходной областью между индентором и

---

[*] Донской государственный технический университет, Ростов-Дон, Россия,

[**] Институт механики, Ханой, Вьетнам

образцом, названной трибосредой; $p = \{p_1, p_2, \quad p_k\}$ - параметры, конкретизирующие нелинейные вектор-функции; m, h, c - положительно определённые симметричные матрицы размерностью $2 \otimes 2$ соответственно обобщенных масс, коэффициентов демпфирования и жесткости. В рассматриваемой модели дополнительно m является диагональной; U - вектор внешних силовых воздействий. В статье рассматривается случай, когда $U = const$ и $V = const$. Здесь и далее символ $\{\cdot\cdot\}^T$ означает операцию транспонирования.

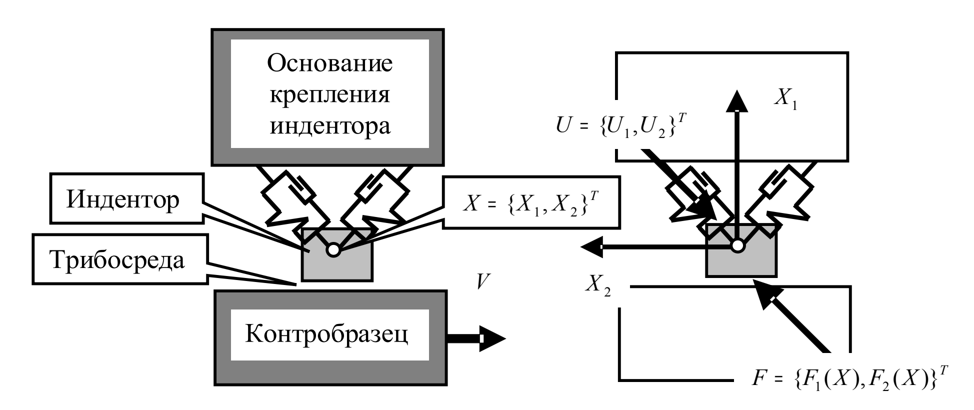


Рис.1. Схема «базовой» динамической модели узла трения

Трибосреда и, следовательно, параметры p формируются в результате работы сил контактного взаимодействия, и свойства трибосреды определяются текущим значением мощности необратимых преобразований в контактной области с учётом её предыстории изменения. Следовательно, свойства трибосреды зависят от траектории мощности необратимых преобразований в контактной области по совершаемой работе. Поэтому параметры p можно представить в виде интегрального оператора

$$p_i(A) = p_{i,0} + \alpha_i^{(1)} A + \alpha_i^{(2)} \int_0^A w_i^{(1)}(\varsigma - A) N(\varsigma) d\varsigma + \alpha_i^{(3)} \int_0^A w_i^{(2)}(A - \varsigma) N(\varsigma) d\varsigma, \quad (2)$$

где $w_i^{(1)}(\varsigma - A)$, $w_i^{(2)}(\varsigma - A)$ - ядра интегральных операторов; $p_{i,0}$ - исходное значение параметра; $\alpha_i^{(1)}$, $\alpha_i^{(2)}$, $\alpha_i^{(3)}$ - коэффициенты; A, N - работа и мощность необратимых преобразований в зоне контакта, то есть $N(A)$ - фазовая траектория в плоскости «работа – мощность».

Ядра интегральных операторов моделируют две противоположные тенденции в изменениях параметров системы. Первый интегральный оператор характеризует процесс стабилизации свойств контакта и выхода динамической системы на некоторый стационарный режим. Это установление равновесной шероховатости, стационарного трибохимического обмена между поверхностями контактируемых тел и трибосредой, установление стационарного гидродинамического процесса в контактной области в слу-

чае граничного трения и пр. Этот процесс характеризуется, как правило, уменьшением переходной области между контактируемыми поверхностями. Второй интегральный оператор характеризует деградацию контактной области и в итоге – установление режима катастрофического изнашивания поверхностей, влияющего на параметры p. Он характеризуется непропорционально быстрым увеличением переходной области – трибосреды.

В статье рассматривается случай, для которого справедливо $V \; dX_2 / dt$, то есть изменение знака текущей скорости относительного скольжения отсутствует. Наиболее важные свойства вектор функций $F(X, dX/dt, V, p)$ для этого случая заключаются в следующем [1-3]:

- $F_1(X, dX/dt, V, p) = F_1(X_1, V, p)$, то есть нормальная составляющая силы контактного взаимодействия зависит от сближения поверхностей, и она не зависит от стационарного смещения индентора относительно образца в тангенциальном направлении;
- $F_2(X, dX/dt, V, p) = F_2[Y, (dX_2/dt + V), p]$, $Y = X_1(t - \tau)$, то есть изменение тангенциальной силы запаздывает по отношению к изменению её нормальной составляющей. Кроме этого тангенциальная сила зависит от текущего значения скорости относительного скольжения и возможны её значения, при которых увеличению скорости соответствует уменьшение силы F_2.

Параметры p фактически есть коэффициенты аппроксимации рассматриваемых нелинейных функций. Они обладают свойством эволюционной изменчивости. Однако в пределах импульсных реакций системы их можно считать постоянными, а эволюционную систему при заданной работе – замороженной. В связи с этим имеется возможность ввести в рассмотрение понятие стационарной эволюционной траектории $X^*(A)$, которая удовлетворяет следующим требованиям:

$$cX^* = F(X^*, 0, V, p) + U \; ; \qquad (3)$$

$$p_i(A) = p_{i,0} + \alpha_i^{(1)} A + \alpha_i^{(2)} V \int_0^A w_i^{(1)}(\varsigma - A) F_2(\varsigma) d\varsigma + \alpha_i^{(3)} V \int_0^A w_i^{(2)}(A - \varsigma) F_2(\varsigma) d\varsigma \; , \qquad (4)$$

где $p_i(A)$ - эволюционная траектория i - го параметра. Следовательно, в параметрическом пространстве P^k мы имеем медленно изменяющуюся траекторию $p(A) P^k$, которой соответствует медленно меняющаяся эволюционная траектория $X^*(A)$. В ходе эволюции система (1) может потерять устойчивость. Тогда в окрестности эволюционной траектории $X^*(A)$ формируются многообразия (орбитально асимптотически устойчивые предельные циклы, инвариантные торы, хаотические аттракторы). Однако для их анализа необходимо раскрывать нелинейные вектор-функции $F(X, \frac{dX}{dt}, V, p)$, что будет сделано в следующих наших публикациях. Здесь важно подчеркнуть, что с помощью уравнений (3) и (4) можно вычислить траектории $X^*(A)$ и $p(A) P^k$, а затем уже анализировать их

устойчивость. Причём, траектории $X^*(A)$ и $p(A)\text{Р}^k$ всегда существуют, так как уравнение (3) характеризует квазистатику.

Для изучения же условий потери устойчивости $X^*(A)$ необходимо рассмотреть уравнение в вариациях относительно этой траектории. Тогда для вариаций $x(t)$, то есть $X(t) = X^* + x(t)$, имеем систему в вариациях относительно X^*:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + h\frac{dx}{dt} + cx = \varphi\,(X^*, x, \frac{dx}{dt}), \tag{5}$$

где

$$\varphi\,(X^*, x, \frac{dx}{dt}) = \{[F_1(X_1^* + x_1) - F_1(X_1^*)],[F_2((X_1^* + y), \frac{dx_2}{dt}) - F_2(X_1^*)\}^T = \{\varphi_1(x), \varphi_2(x)\}^T,$$

$y = x_1(t - \tau)$ - нелинейные функции в вариациях относительно точки равновесия, причем $\varphi\,(X^*, 0, 0)\ \ 0$. Устойчивость траектории $X^*(A)$ определяется свойствами автономной системы

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + h_\Sigma\frac{dx}{dt} + c_\Sigma x = 0, \tag{6}$$

где $c_\Sigma = \begin{matrix} (c_{1,1} + c_{1,1}^{(T)}) & c_{2,1} \\ (c_{1,2} + c_{1,2}^{(T)}) & c_{2,2} \end{matrix}$; $h_\Sigma = \begin{matrix} h_{1,1} & h_{2,1} \\ (h_{1,2} - h_{1,2}^{(T)}) & (h_{2,2} - h_{2,2}^{(T)}) \end{matrix}$; $c_{1,1}^{(T)} = -\partial\varphi_1/\partial x_1$; $c_{1,2}^{(T)} = -\partial\varphi_2/\partial x_1$; $h_{1,2}^{(T)} = \tau\partial\varphi_1/\partial x_1$; $h_{2,2}^{(T)} = \partial\varphi_2/\partial\dot{x}_2$. В (6) принято во внимание, что $\partial\varphi_1/\partial x_1\ \ 0$, $\partial\varphi_2/\partial x_1\ \ 0$ и рассматривается скоростной диапазон, в котором $\partial\varphi_2/\partial\dot{x}_2\ \ 0$. Все указанные параметры зависят от внешних сил U, скорости относительного скольжения V и внутренних факторов, определяемых работой A. Таким образом, они играют роль управляющих параметров, перестраивающих динамические свойства системы. В рассматриваемой системе роль управления играет работа сил контактного взаимодействия, изменяющая следующие параметры:

- $p_1 = c_{1,1}^{(T)}$ - динамическую контактную жёсткость трибосопряжения;
- $p_2 = c_{1,2}^{(T)}$ - параметр, зависящий от динамического коэффициента трения $k = \partial\varphi_2/\partial\varphi_1$, то есть $c_{1,2}^{(T)} = kc_{1,1}^{(T)}$. Заметим, что динамический коэффициент трения может существенно отличаться от традиционно рассматриваемого коэффициента трения $k^{(Tp)} = F_2(X_1)/F_1(X_1)$, так как он связывает нормальные и тангенциальные составляющие сил в вариациях относительно их значения в точке равновесия;
- $p_3 = \tau$ - величину запаздывающего аргумента в преобразовании вариаций нормальных составляющих сил в тангенциальные;
- $p_4 = h_{2,2}^{(T)}$ - коэффициент вязкого сопротивления в тангенциальном направлении. Он может иметь и отрицательное значение в скоростном диапазоне, где увеличению скорости относительного скольжения соответствует уменьшение силы трения F_2.

Прежде всего остановимся на структуре динамических сил, влияющих на устойчивость траектории $X^*(A)$. В свою очередь, структура динамических сил зависит от эволюционной траектории параметров $p(A)\text{Р}\quad^k$.

Структура динамических сил. Её влияние на устойчивость эволюционной траектории. Исходные динамические подсистемы без трибосреды, задаваемые матрицами [ ], [ ], [ ] (левые части в (5)), имеют постоянные параметры. Эти матрицы, как уже отмечено, являются положительно определенными и симметричными, так как динамическая структура машины, как правило, является неизменной, а силовые функции обладают потенциальными свойствами. Кроме этого исходная система без трения имеет асимптотически устойчивую точку равновесия. Напомним, что диссипативная функция при моделировании динамики машин вводится в форме Релея. Однако при переходе к (6) суммарные матрицы диссипации [h_Σ] и жёсткости [c_Σ] уже не обладают симметричными свойствами. Поэтому с учётом (6) их можно представить в виде суммы [5-8]

$$c_\Sigma = c_\Sigma^{(c)} + c_\Sigma^{(\kappa)};\quad h_\Sigma = h_\Sigma^{(c)} + h_\Sigma^{(\kappa)}, \qquad (7)$$

где $c_\Sigma^{(c)} = \begin{matrix} (c_{1,1} + c_{1,1}^{(T)}) & (c_{1,2} + 0,5c_{1,2}^{(T)}) \\ (c_{1,2} + 0,5c_{1,2}^{(T)}) & c_{2,2} \end{matrix}$; $h_\Sigma^{(c)} = \begin{matrix} h_{1,1} & (h_{1,2} - 0,5h_{1,2}^{(T)}) \\ (h_{1,2} - 0,5h_{1,2}^{(T)}) & (h_{2,2} - h_{2,2}^{(T)}) \end{matrix}$

- симметричные части матриц жёсткости и диссипации, отвечающие за потенциальные свойства системы; $c_\Sigma^{(\kappa)} = \begin{matrix} 0 & -0,5c_{1,2}^{(T)} \\ 0,5c_{1,2}^{(T)} & 0 \end{matrix}$,

$h_\Sigma^{(\kappa)} = \begin{matrix} 0 & 0,5h_{1,2}^{(T)} \\ -0,5h_{1,2}^{(T)} & 0 \end{matrix}$ - кососимметричные матрицы. Матрицы $c_{1,2}^{(\kappa)}$, как известно, формируют непотенциальные (циркуляционные) силы. Они могут привести к потере устойчивости точки равновесия. Матрицы $h_{1,2}^{(\kappa)}$ формируют гироскопические силы, которые могут стабилизировать точку равновесия.

Мы приходим к важному заключению:

1. При взаимодействии механической системы с трибосредой естественным образом формируются гироскопические и циркуляционные силы, влияющие на условия асимптотической устойчивости системы. Подчеркнём, что все имеющиеся экспериментальные данные по изучению траекторий движения контактируемых поверхностей в узлах трения показывают, что при потере устойчивости траектории движения индентора всегда остаются круговыми независимо от параметров подвески индентора. В этом подтверждение роли циркуляционных сил, то есть сил, ортогональных направлению упругих деформаций.

2. Симметричная часть матрицы [h_Σ] за счёт коэффициента $h_{2,2}^{(T)}$, определяющего отрицательное приращение тангенциальных сил трения при увеличении скорости относительного скольжения, может преобразоваться из положительно определённой в отрицательно определённую. Таким образом, в системе дополнительно могут

формироваться ускоряющие силы, приводящие к потере устойчивости точки равновесия.

Для определения влияния структуры сил на устойчивость представим (6) в виде

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + h_\Sigma^{(c)}\frac{dx}{dt} + c_\Sigma^{(c)}x + h_\Sigma^{(\kappa)}\frac{dx}{dt} + c_\Sigma^{(\kappa)}x = 0\,. \qquad (8)$$

Рассмотрим несколько случаев.

Первый случай. Рассмотрим влияние асимметрии позиционных сил в предположении, что $\tau \to 0$ и $h_{2,2}^{(T)} \to 0$. Тогда $h_\Sigma^{(k)} \to 0$, $h_\Sigma^{(c)} = h_\Sigma = h$ и вместо (8) имеем

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + h\frac{dx}{dt} + c_\Sigma^{(c)}x + c_\Sigma^{(\kappa)}x = 0\,. \qquad (9)$$

Мы видим, что позиционная связь, формируемая процессом трения, вызывает изменение потенциальных свойств динамической системы и приводит к образованию циркуляционных сил (характеризуются матрицей $c_\Sigma^{(k)}$), которые могут влиять на устойчивость точки равновесия. Из (9) получаем характеристический полином системы

$$\Delta_\Sigma(p) = \Delta(p) + c_{1,1}^{(T)}[mp^2 + (h_{2,2})p + (c_{2,2})] - h_{1,2}^{(\,)}p(c_{2,1} + {}_{2,1})\,, \qquad (10)$$

где $\Delta(p)$ - характеристический полином исходной системы без трения. Полином $\Delta(p)$ соответствует асимптотически устойчивой системе.

Анализ (8) позволяет сформулировать первое свойство влияния асимметрии позиционных сил, формируемых в трибосопряжении, на устойчивость точки равновесия системы. Если исходная динамическая структура подвески индентора является ортогональной, то циркуляционные силы не могут привести к потере устойчивости равновесия. Здесь и далее под ортогональной будем понимать динамическую структуру, для которой все недиагональные элемента матриц c и h равны нулю, то есть в исходном состоянии координаты x являются нормальными. Действительно, при условии $c_{1,2} = h_{1,2} = 0$ полином (10) преобразуется в полином $\Delta_\Sigma(p) = (mp^2 + h_{1,1}p + c_{1,1} + c_{1,1}^{(T)})(mp^2 + h_{2,2}p + c_{2,2})$, корни которого имеют отрицательные вещественные части. Очевидно, что это утверждение можно распространить и на случай, когда механическая часть системы без трения представлена в виде N-мерной динамической структуры, обладающей ортогональными динамическими свойствами.

Обозначим $0,5c_{1,2}^{(T)} = \mu$ и рассмотрим характеристический полином системы, приведённой к виду (9), при $h^{(k)} = 0$, $h = h_\Sigma$:

$$\Delta_\Sigma(p) = \Delta(p) + \mu^2\,, \qquad (11)$$

где $\Delta(p) = (mp^2 + h_{1,1}p + c_{1,1}^{(c)})(mp^2 + h_{2,2}p + c_{2,2}^{(c)}) - (h_{1,2}p + c_{1,2}^{(c)})^2$ - характеристический полином системы (11) без связей, формирующих циркуляционные силы, то есть обладающей потенциальными свойствами. Пусть матрица $c_\Sigma^{(c)}$ является положительно определённой. Матрица h

является положительно определённой. Поэтому полином $\Delta(p)$ имеет все корни с отрицательными вещественными частями, то есть соответствует асимптотически устойчивой системе. Для выяснения влияния циркуляционных сил, учитываемых μ^2, удобно воспользоваться частотным критерием устойчивости Михайлова (рис.2). Очевидно, что μ^2 смещает годограф Михайлова вдоль вещественной оси во всём частотном диапазоне на величину μ^2 и может преобразовать асимптотически устойчивую систему в неустойчивую. Кроме этого при увеличении μ значение определителя, составленного из матрицы $c_{\Sigma}^{(c)}$, по мере увеличения $c_{1,2}^{(T)}$ уменьшается. Принципиально при неограниченном увеличении k матрица $c_{\Sigma}^{(c)}$ может стать отрицательно определённой.

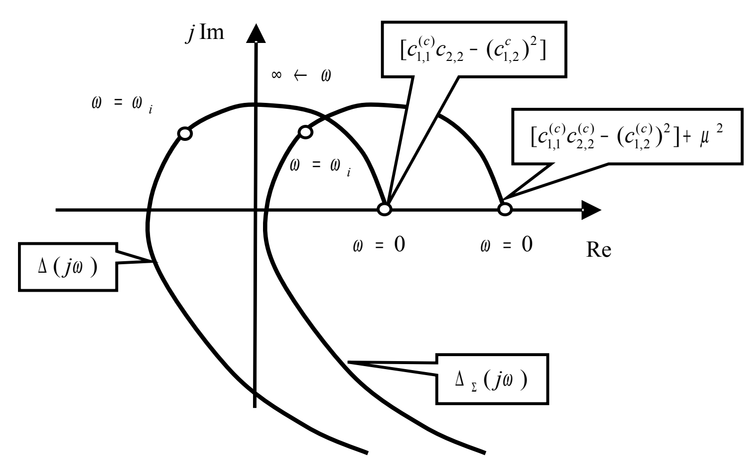


Рис.2. Схема преобразования годографа Михайлова
за счёт циркуляционных сил, формируемых в трибосопряжении

Мы видим, что неконсервативные (циркуляционные) силы, естественным образом формируемые в любой динамической системе трения, могут приводить к потере устойчивости точки равновесия системы. Причём потеря устойчивости зависит от параметров динамической подсистемы индентора, характеристик трибосопряжения, внешних условий и от траектории $p(A)\text{Р}^{k}$. Подчеркнём, что положение равновесия определяет точку, в окрестности которой определяется градиент функции сближения и динамический коэффициент трения.

Второй случай. Рассмотрим влияние на устойчивость равновесия запаздывающего аргумента τ, изменяющего симметричную (потенциальную) матрицу диссипации $h_{\Sigma}^{(c)}$ и формирующего гироскопические силы за счёт кососимметричной части $h_{\Sigma}^{(k)}$. Как и в первом случае, если матрица диссипации исходной системы является диагональной (подвеска индентора обладает ортогональными динамическими свойствами), то запаздывающий аргумент никак не влияет на устойчивость точки равновесия системы. В общем же случае структура

матриц $h_{\Sigma}^{(c)}$ и $h_{\Sigma}^{(k)}$ показывает, что запаздывающий аргумент τ усиливает положительную определённость матрицы $h_{\Sigma}^{(c)}$ и дополнительно приводит к формированию гироскопических сил, также увеличивающих запас устойчивости системы. Для доказательства этого утверждения рассмотрим характеристический полином системы в предположении, что $h_{2,2}^{(T)} = 0$. Тогда имеем характеристический полином системы $\Delta^{*}_{\Sigma}(p)$:

$$\Delta^{*}_{\Sigma}(p) = \Delta_{\Sigma}(p) + \tau k c_{1,1}^{(T)} p (h_{2,1} p + c_{2,1}), \tag{12}$$

где $\Delta_{\Sigma}(p)$ - соответствует (10).

Пусть полином $\Delta_{\Sigma}(p)$ соответствует системе, устойчивой по Ляпунову. Тогда годограф $\Delta_{\Sigma}(j\omega)$ проходит через начало координат (рис.3,а). Каждая точка годографа $\Delta^{*}_{\Sigma}(j\omega)$ смещается влево на $-\tau k c_{1,1}^{(T)} h_{2,1}\omega^{2}$ и вверх на величину $\tau k c_{1,1}^{(T)} c_{2,1}\omega j$, то есть будет смещаться во внешнюю сторону по отношению к годографу $\Delta_{\Sigma}(p)$, соответствующему устойчивой по Ляпунову системе. Следовательно, годограф $\Delta^{*}_{\Sigma}(j\omega)$ будет отвечать асимптотически устойчивой системе. Более того, если годограф $\Delta^{*}_{\Sigma}(j\omega)$ соответствует неустойчивой системе, то по мере увеличения τ система может приобрести асимптотическую устойчивость (рис.3,б). Подчеркнём, что механизм влияния τ на устойчивость равновесия двоякий. Во-первых, по мере увеличения запаздывающего аргумента усиливается положительная определённость потенциальной матрицы диссипации, во-вторых, при этом возрастает стабилизирующее влияние гироскопических сил, формируемых кососимметричными составляющими матрицы $h_{\Sigma}^{(k)}$.

Сделаем вывод. Гироскопические члены, определяемые запаздыванием тангенциальной составляющей силы контактного взаимодействия по отношению к смещениям индентора относительно образца в нормальном направлении, стабилизируют точку равновесия.

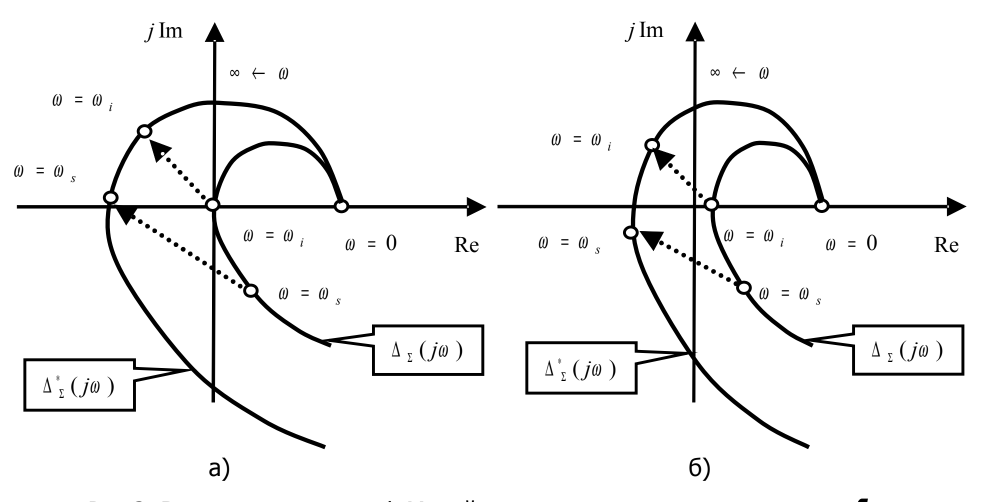


Рис.3. Влияние на годограф Михайлова запаздывающего аргумента τ

Третий случай. Рассмотрим влияние на устойчивость параметра $h_{2,2}^{(T)}$, который связан с кинетической характеристикой процесса трения [4]. Нетрудно показать, что к аналогичным эффектам приводит и запаздывание нормальных сил по отношению к нормальным к поверхности смещениям индентора по отношению к образцу. Анализ матриц h_Σ и c_Σ показывает, что параметр $h_{2,2}^{(T)}$ влияет на симметричную составляющую $h_\Sigma^{(c)}$. Более того, при увеличении $h_{2,2}^{(T)}$ возможно преобразование матрицы $h_\Sigma^{(c)}$ в отрицательно определённую. В этом случае в системе трения могут формироваться ускоряющие силы, при всех условиях вызывающие потерю устойчивости точки равновесия системы.

Для выяснения механизма потери устойчивости в этом случае вновь воспользуется изложенным выше приёмом. Для этого рассмотрим характеристический полином $\Delta_\Sigma^{**}(p)$:

$$\Delta_\Sigma^{**}(p) = \Delta_\Sigma^{*}(p) - h_{2,2}^{(T)} p\{mp^2 + h_{1,1}p + c_{1,1} + c_{1,1}^{(T)}\} \qquad (13)$$

и выясним, каким образом смещается годограф Михайлова за счёт члена, зависящего от $h_{2,2}^{(T)}$ (рис.4), если полином $\Delta_\Sigma^{*}(p)$ соответствует системе, устойчивой по Ляпунову. В терминологии теории управления система, имеющая полином $\Delta_\Sigma^{*}(p)$, находится на границе устойчивости.

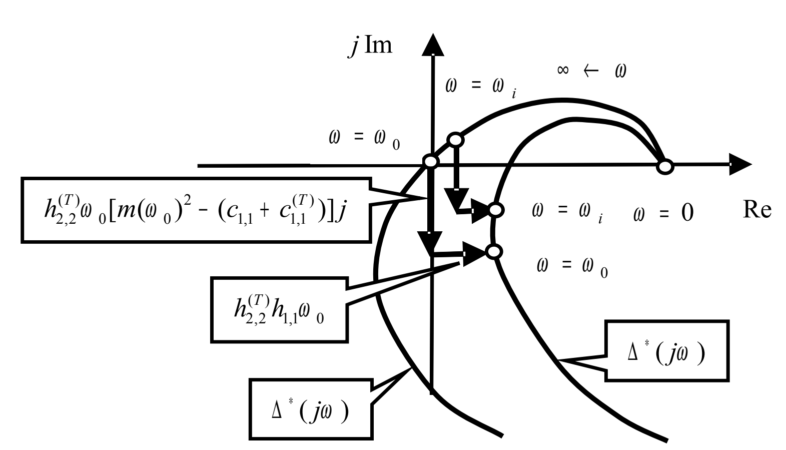


Рис.4. Преобразование годографа Михайлова
за счёт влияния коэффициента отрицательного динамического трения
в тангенциальном направлении

Подчеркнем, что формируемые в контакте гироскопические и циркуляционные силы в этом случае не могут стабилизировать равновесие системы, если оно потеряло устойчивость за счёт отрицательного динамического трения или за счёт запаздывания нормальных составляющих сил по отношению к их нормальным смещениям. Удивительным является то, что при увеличении контактной жёсткости системы в нормальном направлении, а также при возрастании жёсткости

подвески и вязкого сопротивления индентора в этом же направлении склонность к потере устойчивости равновесия системы возрастает.

Влияние на устойчивость эволюционных параметров. Так как параметры трибосреды $p_i(A), i = 1,2,3,4$ обладают свойством эволюционной изменчивости, то при анализе устойчивости медленно изменяющейся эволюционной траектории в целом в пределах всего периода работы сил трения естественно воспользоваться методом D-разбиения. Условие устойчивости в целом определяется требованием $p(A)$ M (M - область устойчивости в пространстве варьируемых параметров).

Проиллюстрируем анализ устойчивости эволюционных траекторий на примере, анализ которого имеет самостоятельное значение. Рассмотрим систему, параметры динамической характеристики процесса трения в которой удовлетворяют следующим требованиям: $\tau \to 0$, на индентор приложена внешняя нормальная сила $F_1 = const$. Кроме этого рассмотрим суммарный коэффициент вязкого трения в тангенциальном направлении $h^*_{2,2} = h_{2,2} - h^{(T)}_{2,2}$, который может в зависимости от $h^{(T)}_{2,2} = p_4$ принимать отрицательное значение. Так как динамический коэффициент трения может существенно отличаться от традиционного коэффициента трения, введём в рассмотрение параметр $p_0 = k^{(Tp)}$, обладающий также свойством эволюционной изменчивости, то есть $F_2 = p_0 F_1$. В рассматриваемом примере $h^*_{2,2} const$. В связи с тем, что p_4 тоже эволюционный параметр, рассмотрим совокупность областей устойчивости для различных значений p_4.

Экспериментальные данные, приведённые в работах [1-3], показывают, что традиционная система, функционирующая в режиме трения без смазки или в случае граничного трения, имеет две тенденции.

Первая направлена на стабилизацию равновесия. При этом после приработки возрастает контактная жёсткость трибосопряжения в нормальном направлении (параметр p_1); уменьшается динамический коэффициент трения, следовательно, параметр p_2; уменьшается коэффициент трения (параметр p_0); практически остаётся неизменным величина запаздывающего аргумента (параметр p_3), так как он в основном зависит от средней скорости относительного скольжения (в нашем примере $p_3 = 0$); уменьшается коэффициент отрицательного вязкого трения в тангенциальном направлении (параметр p_4).

Вторая тенденция направлена на деградацию контактной области. Она проявляется в противоположных тенденциях изменения указанных параметров.

В связи с этим для определения эволюционных параметров p_1 и p_2, изменения которых зависят от эволюции p_0, можно воспользоваться следующей системой:

$$
\begin{aligned}
&p_0(A) = p_{0,0} - \alpha_0^{(1)} A - \alpha_0^{(2)} V \int_0^A \exp\frac{(\varsigma - A)}{T_0^{(1)}} F_2(\varsigma)d\varsigma + \alpha_0^{(3)} V \int_0^A \exp\frac{(A - \varsigma)}{T_0^{(2)}} F_2(\varsigma)d\varsigma ;\\
&p_1(A) = p_{0,1} + \alpha_1^{(1)} A + \alpha_1^{(2)} V \int_0^A \exp\frac{(\varsigma - A)}{T_1^{(1)}} F_2(\varsigma)d\varsigma - \alpha_1^{(3)} V \int_0^A \exp\frac{(A - \varsigma)}{T_1^{(2)}} F_2(\varsigma)d\varsigma ;\\
&p_2(A) = p_{0,2} - \alpha_2^{(1)} A - \alpha_2^{(2)} V \int_0^A \exp\frac{(\varsigma - A)}{T_2^{(1)}} F_2(\varsigma)d\varsigma + \alpha_2^{(3)} V \int_0^A \exp\frac{(A - \varsigma)}{T_2^{(2)}} F_2(\varsigma)d\varsigma .
\end{aligned}
\qquad (14)
$$

Первый интегральный оператор позволяет определить эволюционную траекторию изменения тангенциальной составляющей силы трения $F_2(A)$, остальные уравнения позволяют определить эволюционные траектории параметров $p_1(A)$, $p_2(A)$. Для определения области варьируемых параметров, при которых система асимптотически устойчива, естественно использовать метод D-разбиений [9]. Полагая $h^*_{2,2} = const$, из (6) получаем уравнения фигуративных линий:

$$
\begin{aligned}
(-m\omega^2 + c_{2,2})p_1 - c_{1,2}p_2 &= -[\alpha_4\omega^4 - \alpha_2\omega^2 + \alpha_0];\\
h^*_{2,2}\omega\, p_1 - h_{1,2}\omega\, p_2 &= -\omega[\alpha_3\omega^2 - \alpha_1],
\end{aligned}
\qquad (15)
$$

где $\alpha_0 = c_{1,1}c_{2,2} - (c_{1,2})^2$; $\alpha_1 = h_{1,1}c_{2,2} + h^*_{2,2}c_{1,1} - 2h_{1,2}c_{1,2}$; $\alpha_2 = m(c_{1,1} + c_{2,2}) + h_{1,1}h^*_{2,2} - (h_{1,2})^2$; $\alpha_3 = m(h_{1,1} + h^*_{2,2})$; $\alpha_4 = m^2$. Система (15) позволяет построить фигуративные линии и выделить область устойчивости системы. Задаваясь дискретными значениями p_4 на отрезке $p_4 \quad (p_4^{(1)}; p_4^{(2)})$, получаем семейство областей устойчивости. Пример области устойчивости показан на рис.5 для системы, имеющей следующие параметры подвески индентора: $c = \begin{bmatrix} 1000 кГ/мм; & 1400 кГ/мм \\ 1400 кГ/мм; & 2250 кГ/мм \end{bmatrix}$;

$h = \begin{bmatrix} 0{,}1 кГс/мм; & 0{,}13 кГс/мм \\ 0{,}13 кГс/мм; & 0{,}2 кГс/мм \end{bmatrix}$;

$m = \begin{bmatrix} 10^{-3} кГс^2/мм; & 0 \\ 0; & 10^{-3} кГс^2/мм \end{bmatrix}$. Параметры, входящие в интегральные операторы (14), приведены в таблице.

Параметры, входящие в интегральные операторы

i	$\alpha_i^{(1)}$	$\alpha_i^{(2)}$	$\alpha_i^{(3)}$	$T_i^{(1)}$, [кГм]	$T_i^{(2)}$, [кГм]
0	$2\cdot10^{-6}$, [кГм]$^{-1}$	$1{,}2\cdot10^{-5}$, с/[кГм]^2	$5\cdot10^{-8}$, с/[кГм]^2	500	4000

1	20, м$^{-2}$	120, с/[кГм^3]	0,3, с/[кГм^3]	500	4000
2	30, м$^{-2}$	400, с/[кГм^3]	0,5, с/[кГм^3]	500	3200

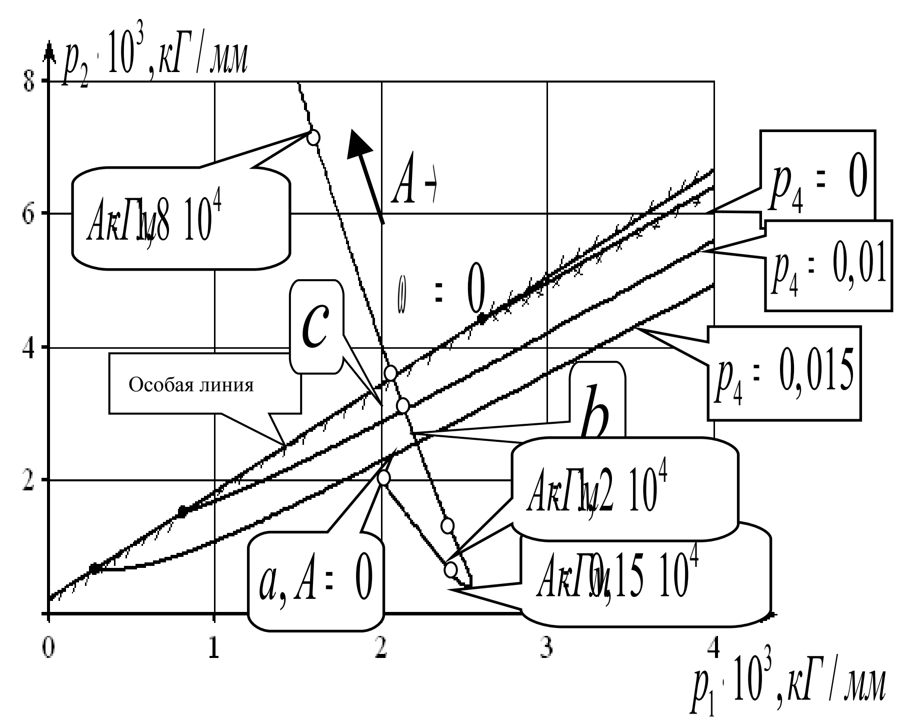


Рис. 5. Области D-разбиения, в которых приведена эволюционная траектория параметров $p_1(A)$ и $p_2(A)$ при изменении A в пределах $(0;1,8\ 10^4 кГм)$. Координаты точек: $A(p_1 = 2\ 10^3, p_2 = 2\ 10^3)$; $B(p_1 = 2,14\ 10^3, p_2 = 3,06\ 10^3)$; $C(p_1 = 2,07\ 10^3, p_2 = 3,56\ 10^3)$

Прежде всего охарактеризуем область устойчивости системы. Для $p_4 = 0$ (коэффициент вязкого трения со стороны трибосреды равен нулю) приведена двойная штриховка фигуративной линии и одинарные штриховки особой линии при $\omega = 0$. Таким образом, область устойчивости находится ниже приведённых линий для $p_4 = 0$. По мере увеличения p_4 область трансформируется, как показано на иллюстрации, и при $p_4 \; 0,031$ вырождается полностью. В этом случае матрица диссипации с учётом влияния трибосреды становится отрицательно определённой.

На область устойчивости варьируемых параметров наложена эволюционная диаграмма $p_1(A)$ и $p_2(A)$, которая при $p_4 = 0$ в точке «с» пересекает одинарную штриховку, а при $p_4 = 0,01$ - вначале двойную штриховку, а затем одинарную. Этим двум системам, отличающимся значением $p_4 = 0$ и $p_4 = 0,01$, соответствует эволюционная диаграмма двух корней $p_1^{(1)}$ и $p_1^{(2)}$ характеристического полинома замороженной системы

(рис.6). Два других корня, имеющих значительные отрицательные вещественные части, на рис.6 не показаны. Таким образом, в ходе эволюции системы при $p_4 = 0$ система в точке «с» приобретает свойство апериодической неустойчивости. При $p_4 = 0,01$ она в точке «b» становится неустойчивой, причём неустойчивость имеет колебательный характер.

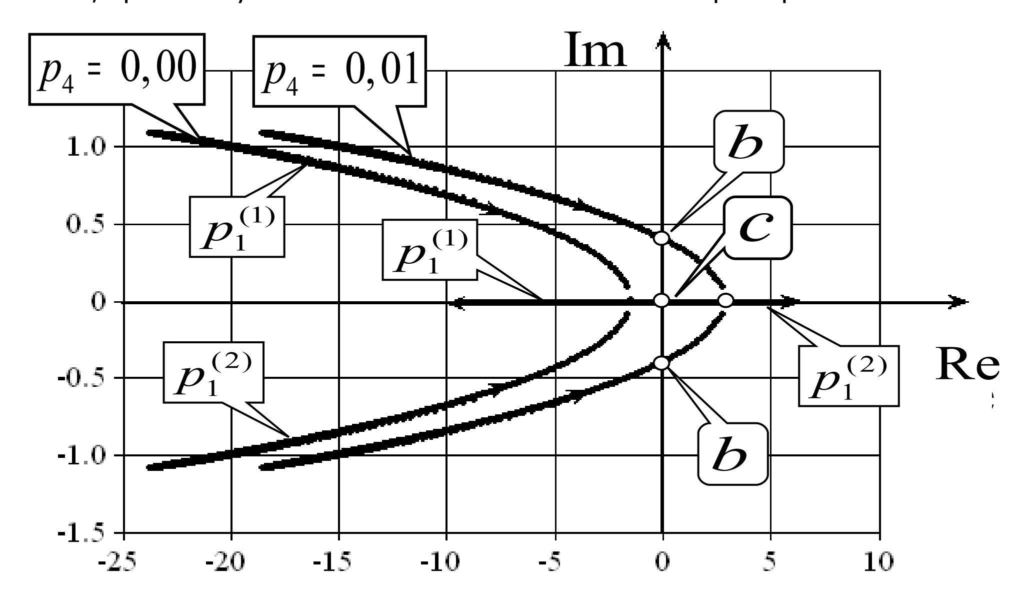


Рис.6. Эволюционные траектории корней характеристического полинома системы

Для рассмотрения эволюции системы в области, в которой эволюционная траектория является неустойчивой, необходимо привлекать нелинейные уравнения связи, формируемые трибосредой. В настоящей статье этот вопрос не рассматривается. Общие свойства рассматриваемой в качестве примера системы таковы: на первом этапе приработки системы трения запас устойчивости в системе возрастает. В пределах работы сил трения $(0,15\ 10^4;1,2\ 10^4)кГм$ динамические свойства системы остаются примерно неизменными. Затем система достаточно быстро теряет устойчивость эволюционной траектории, и в зависимости от параметров подвески индентора потеря устойчивости может быть апериодической или колебательной.

Заключение. 1. При взаимодействии механической системы с трибосредой получаемая динамическая система обладает принципиально иными динамическими свойствами по сравнению с исходной механической системой без трения. При этом в контакте в зоне трения естественным образом формируются диссипативные, ускоряющие, гироскопические, потенциальные и циркуляционные силы. Характерно, что диссипативные и потенциальные силы зависят как от параметров связи, формируемой узлом трения, так и параметров подвески индентора. Что касается гироскопических и циркуляционных сил, то они не зависят от параметров подвески индентора.

Механизм изменения потенциальных и формирования циркуляционных сил связан с тем, что позиционные смещения контактируемых поверх-

ностей в направлении скорости относительного скольжения не изменяют силовых реакций со стороны трибосопряжения. При определённом соотношении нормальных и тангенциальных составляющих сил контактного взаимодействия, рассматриваемых в вариациях относительно стационарного состояния, динамическая система за счёт формирования циркуляционных сил может потерять устойчивость. Потеря устойчивости зависит также от параметров подвески индентора. В частности, если матрицы жёсткости и диссипации подвески индентора являются диагональными, то циркуляционные силы не влияют на устойчивость равновесия. В этом случае возможна потеря устойчивости тангенциальной формы колебаний за счёт отрицательного коэффициента трения в вариациях относительно стационарного состояния. Этот случай фактически вытекает из известных моделей Релея и Ван дер Поля, которые после некоторой модификации используются для объяснения формирования автоколебаний механических систем, взаимодействующих с трением.

Механизм изменения потенциальных диссипативных и формирования гироскопических сил обусловлен влиянием запаздывания изменения тангенциальных составляющих сил по отношению к вариациям нормальных составляющих смещений индентора относительно образца. Это запаздывание всегда направлено на стабилизацию точки равновесия системы. За счёт этого система, устойчивая по Ляпунову, всегда становится асимптотически устойчивой. Более того, при увеличении запаздывания неустойчивую точку равновесия можно стабилизировать за счёт изменения потенциальной матрицы диссипации и формирования гироскопических сил. Влияние этих сил на устойчивость равновесия зависит от параметров подвески индентора. Причём, гироскопические силы не влияют на устойчивость равновесия в том случае, если недиагональные элементы матриц жёсткости и диссипации подвески равны нулю.

Механизм формирования ускоряющих сил обусловлен существованием кинетической характеристики процесса трения, то есть уменьшением тангенциальной силы трения по мере увеличения скорости относительного скольжения в определённом скоростном диапазоне. Ускоряющие силы могут формироваться и за счёт запаздывания нормальных к контактируемой поверхности сил при вариациях смещения поверхности в этом же направлении.

2. Параметры линеаризованной динамической связи, формируемой трибосопряжением, обладают свойством эволюционной изменчивости. Причём изменения параметров определяются траекторией мощности необратимых преобразований в узле трения по совершённой работе. Поэтому текущие значения параметров можно представить в виде интегральных операторов типа операторов Вольтера второго рода. Как правило, изменения параметров имеют две тенденции. Первая направлена на стабилизацию медленно изменяющейся эволюционной траектории. В этом случае запас устойчивости в системе возрастает. Вторая – на деградацию свойств контакта. Эта тенденция вызывает потерю устойчивости. Подчеркнем, что выполненный анализ относится к малым колебаниям относительно точки равновесия, поэтому при потере устойчивости в системе необходимо анализировать нелинейные связи, формируемые процессом в вариациях относительно точки равновесия, и образующиеся при этом многообразия в

пространстве состояния системы, которые являются естественными для рассматриваемой системы.

3. Если задана априорная информация об изменениях внешних условий функционирования системы (функция изменения нормального давления и скорости относительного скольжения), то предложенные математические модели позволяют прогнозировать динамическую перестройку системы. Кроме этого на основе наблюдения за траекториями корней характеристического полинома системы имеется возможность осуществлять динамический мониторинг состояния узла трения в процессе эксплуатации. Одним из направлений мониторинга является авторегрессионный спектральный анализ наблюдаемых вибрационных последовательностей.

В статье излагаются результаты исследований, полученных при поддержке гранта 07-09-90000 РФФИ по Российско - Вьетнамскому научному сотрудничеству.

Библиографический список

1. *Заковоротный В.Л.* Нелинейная трибомеханика / В.Л. Заковоротный. – Ростов н/Д: Издательский центр ДГТУ, 2000. – 293 с.
2. *Заковоротный В.Л.* Динамика трибосистем. Самоорганизация, эволюция / В.Л. Заковоротный. – Ростов н/Д: Издательский центр ДГТУ, 2003. – 502 с.
3. *Заковоротный В.Л.* Введение в динамику трибосистем / В.Л. Заковоротный. – Ростов н/Д: ИнфоСервис, 2004. – 680 с.
4. *Крагельский И.В.* Фрикционные автоколебания /И.В.Крагельский, Н.В.Гитис. – М.: Наука, 1987.
5. *Wehrli C.* Zur Rlassifikation von Kraften. Schweiz / C.Wehrli, H.Ziegler. Bauzeitung, 84, № 48, 1966.
6. *Ziegler H.* Linear Elastic Stability / H.Ziegler. Critical Analysis of Methods, ZAMP, Basel – Zurich, IV, F-2, 1953.
7. *Thomson W.* Treatise on Natural Phylosophy / W.Thomson and P.Tai. Part 1. Cambridge University Press, 1879.
8. *Меркин Д.Р.* Введение в теорию устойчивости движения / Д.Р.Меркин. – М.: Наука, 1971.
9. *Бутенин Н.В.* Введение в теорию нелинейных колебаний / Н.В.Бутенин, Ю.И.Неймарк, Н.А.Фуфаев. – М.: Наука, 1987.

Материал поступил в редакцию 18.12.07.

ZAKOVOROTNY V.L.[*] , NGUYEN DONG ANH[**] , PHAM DINH TUNG[*]

(Don State Technical University[*] , Rostov- Don, Russia;
Institute of Mechanics[**] , Hanoi, Vietnam)

THE EVOLUTION TRAJECTORY STABILITY FOR MECHANICAL SYSTEM INTERACTING WITH TRIBOMEDIA

Conditions of motion stability loss is considering relative to mechanical system, interacting with media, forming in tribocoupling. Conditions of forming and role of dissipative, gyroscopic, potential and circular forces, which formed naturally in tribocoupling and changed in evolution transformation, are shown.

ЗАКОВОРОТНЫЙ Вилор Лаврентьевич (р. 1940), доктор технических наук (1981), профессор (1983), заведующий кафедрой «Автоматизация производственных процессов» ДГГУ (1981), проректор по научно-исследовательской работе ДГТУ. Окончил (1962) РИСХМ по специальности «Автоматические, телемеханические и электроизмерительные приборы и устройства» Работает в области динамического мониторинга, взаимодействия сложных управляемых систем со средами.
В 1984 г. совместно с сотрудниками Киевского политехнического института и Южмаша стал лауреатом Государственной премии в области науки и техники Украины.
Имеет более 250 научных работ. Руководит аспирантурой и докторантурой.

НГУЕН ДОНГ АНЬ (р. 1957), доктор физико-математических наук, профессор, заведующий отделом Института механики академии наук и технологий Вьетнама. Председатель Совета Вьетнама по механике. Ученик академика АН СССР Ю.А. Митропольского. Область научных интересов: асимптотические методы в нелинейной динамике, статистическая динамика нелинейных механических систем.

ФАМ ДИНЬ ТУНГ (р. 1980), аспирант Донского государственного технического университета. Область научных интересов: эволюция механической системы, взаимодействующей с процессом резания.